

(Δ4)

$$E(\varnothing) = \int_1^e x^{\ln x} dx$$

$$\left[x^{\ln x} = e^{\ln^2 x} \quad \text{διότι: } \frac{\text{Απόδειξη}}{e^{\ln x \cdot \ln x}} = (e^{\ln x})^{\ln x} = x^{\ln x} \right]$$

Επίσης $e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1 \quad \forall x > 0.$$

Εξ ου ισχύει για $x=1$ το οποίο είναι $x=1$.

οπότε γενικά $e^{\ln^2 x} > \ln^2 x + 1$.

$$E(\varnothing) = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$$

{κατά τον τύπο $\int u'v = uv - \int u v' dx$ }

$$\bullet \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = \left[x \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx +$$

$$+ (e-1) = 2e-1 - \int_1^e 2 \ln x dx = 2e-3$$

Οπότε:

$$E(\varnothing) > 2e-3$$

(Δ3)

F : ως προς f ομοζωνία στο $(0, +\infty)$.

$$F(x) = x^{\ln x}$$

$$F'(x) = (x^{\ln x})' = \frac{2 \ln x}{x} \cdot x^{\ln x}$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Για $x > 1$: $F'(x) > 0$ لذا $F \uparrow$.

Για $0 < x < 1$: $F'(x) < 0$ لذا $F \downarrow$.

Επίσης εξισώσεις $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$.

Για $x > 1$: $x^2 > x \xrightarrow{F \uparrow} F(x^2) > F(x)$ στο $(0, +\infty)$

οποτε η εξίσωση $F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$

είναι αδύνατη, καθώς μπορεί να έχουμε μια δευτερεύουσα ρίζα από δεξιά όχι.

Για $0 < x < 1$: $x^2 < x \xrightarrow{F \downarrow} F(x^2) > F(x)$
Επίσης αδύνατη η εξίσωση.

Για $x = 1$: Πρέπει να είναι επανωθεν
επί, οποτε Μ.Α (μοναδική λύση)

$$\boxed{x=1}$$

$$ii) \quad \underline{N.A.O} \quad F(1) = 1.$$

$$16\chi\acute{o}\tau\iota \quad \text{ou:} \quad f(x) = \frac{2 \cdot F(x) \cdot \ln x}{x}, \quad x > 0.$$

$$\text{οπότε:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2F(x) \cdot \ln x}{x}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x)}{x} = 2F(1)$$

$$\text{Από προηγούμενο επήρξαμε} \quad 2F(1) = 2 \Rightarrow$$

$$\boxed{F(1) = 1}$$

$$\text{και έφραγον} \quad g(x) = G' \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = G \Rightarrow$$

$$F(x) = G \cdot x^{\ln x} \quad \begin{matrix} F(1)=1 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad 1 = G \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{G = 1}$$

$$\text{Άρα:} \quad \boxed{F(x) = x^{\ln x}, \quad x > 0}$$

ΘΕΜΑ Δ

F : παράγωγα, άρα $(F'(x) = f(x))$ 9

(Δ1)

$$g'(x) = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - (x^{\ln x})' \cdot F(x)}{(x^{\ln x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{f(x) \cancel{x^{\ln x}} - 2 \frac{\ln x}{x} \cdot F(x) \cancel{x^{\ln x}}}{(x^{\ln x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{f(x) \cdot x - 2 \ln x \cdot F(x)}{x \cdot x^{\ln x}}$$

of ws: $f(x) \cdot x = 2 \ln x \cdot F(x)$ ως δεδομένο.

Άρα: $g'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{g(x) = C}$

Σταθερά.

(Δ2)

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\ln x)' = \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{f'(1)}{1} = 2.$$

Από την
δοθείσα βχ(α)

και $x=1$: $f(1) = 0$.

και άρα $f'(1) = 2$ διότι εφαπτομένη στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη με $y = 2x$, άρα ίδια κλίση.

Г4

$$t \geq 0$$

$$y = f(x), x \geq 0.$$

refiner: $y'(t) = x'(t)$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot (x^2+x)' = x'(t)$$

$$\frac{2x \cdot \dot{x}(t) + \dot{x}(t)}{2\sqrt{x^2 + x}} = \dot{x}(t) \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{x'(t)}(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}} = \cancel{x'(t)} \Rightarrow 2x+1 = 2\sqrt{x^2+x}$$

$$(2x+1)^2 = 4(x^2+x) \Rightarrow$$

$$(2x+1)^2 = 4(x^2+x) \Rightarrow$$

$$\cancel{4x^2} + \cancel{4x} = \cancel{4x^2} + \cancel{4x} + 1$$

$$0 = 1 \quad 2 \sin 2\alpha$$

Αρ: Δεν υπάρχει $t_0 \geq 0$ $0 = 1 \quad 28$

(F3) κατασκευή αβυττωτή δεν έχουμε
 διο21 f συνεχής R.

Αναζητούμε στο $\pm\infty$ για ηλάρια ή
 ορίσονται.

Σ20 (+∞)

ως τορρής
 $(y = 2x + 6)$

$$1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \text{ DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

οπότε $y = x + \frac{1}{2}$

ηλάρια αβυττωτή στο +∞

Σ20 (-∞)

$$1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot u/x}{x} = 0.$$

$$\star = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot u/x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x \frac{u/x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{u/x}{x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} \quad \text{DLH } \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

οπότε $y = 0$ ορίσονται

Συνεπώς δεν είναι παραγωγίσιμη η $f(x)$ στο $x_0 = 0$. (7)

(Γ2) $\xi \in (-\pi, 0)$. Θα λάβουμε τον πάνω
υπόδο. $f(x) = e^x \cdot \mu x$, $x < 0$.

Για να γίνουνται f και $(\varepsilon) : y = x + \frac{1}{2}$

πρέπει:

$$e^x \cdot \mu x = x + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$e^x \cdot \mu x - x - \frac{1}{2} = 0$$

Θεωρούμε: $h(x) = e^x \cdot \mu x - x - \frac{1}{2}$

Μελετούμε ~~ως~~ προσημείους θ. Bolzano
στο $[-\pi, 0]$.

(-) $h(x)$ συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως
πράξεις συνεχών.

$$\begin{aligned} h(-\pi) &= e^{-\pi} \cdot 0 + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0 \\ h(0) &= -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$h(-\pi) \cdot h(0) < 0$$

Ικανοποιούνται οι προη.
Σύμφωνα με τον
Bolzano υπάρχει ένα
μέγεθος $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο,
ώστε $h(\xi) = 0$.

(6)

Συνεπώς οι δύο εφαπτομένες γειτνώνονται
πάνω στον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται: $f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta\mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$

(Γ1)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \eta\mu x = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

$$f(0) = 0$$

Οπότε f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έλεγχος παραγώγου στο $x_0 = 0$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

(B4)

$$g(x) = x + f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(5)

$$\left. \begin{array}{l} A(\xi, f(\xi)) \\ B(\xi, g(\xi)) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{τείνονται στον } y' \\ \text{οι εφαπτομένες} \\ \text{τους.} \end{array}$$

Υπολογισμός εφαπτομένης ως f

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

Για $x=0$: $y - f(\xi) = f'(\xi)(-\xi)$

(y')

$$\varepsilon_1: y = -\xi f'(\xi) + f(\xi)$$

Υπολογισμός εφαπτομένης ως g

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$$

όπως $g'(\xi) = 1 + f'(\xi)$ με αντικατάσταση

$$y - g(\xi) = (1 + f'(\xi))(x - \xi) \Rightarrow$$

Για $x=0$: $y = g(\xi) + (1 + f'(\xi))(-\xi)$

όπως: $g(\xi) = \xi + f(\xi) \Rightarrow \varepsilon_2: y = -\xi f'(\xi) + f(\xi)$

B3

(4)

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

(Πιθανή θέση Σ.Κ.).

Ελέγχοντας πρόσημο $f''(x)$ ευαγγέρισε τον $x = 2$.

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 2}$ (κυρτή)
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow \boxed{x < 2}$ (κοίλη)

Οπότε η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$
 ενώ κοίλη στο $(-\infty, 2]$.

Παρουσιάζει Σ.Κ. όταν ~~είναι~~ $x = 2$
 την στιγμή $\boxed{f(2) = -1}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f			

(κοίλη) Σ.Κ. (κυρτή)

Βρίσκουμε πάλι βωέχει για κάθε διαστήα το βωδο των ενς $f(x)$. (3)

Ανάλυση:

$$A_1 = (-\infty, 1] \quad (f \nearrow)$$
$$A_2 = [1, 3] \quad (f \searrow)$$
$$A_3 = [3, +\infty) \quad (f \nearrow)$$

$$f(A_1) \stackrel{f \nearrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right]$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ οι ποσότητες
- $f(1) = 1$

$$\boxed{f(A_1) = (-\infty, 1]}$$

$$f(A_2) \stackrel{f \searrow}{=} [f(3), f(1)] = [-3, 1]$$

- $f(3) = -3$ οπότε $\boxed{f(A_2) = [-3, 1]}$

$$f(A_3) \stackrel{f \nearrow}{=} [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-3, +\infty)$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\Rightarrow \boxed{f(A_3) = [-3, +\infty)}$$

Παρατηρούμε ότι το $0 \in f(A_1)$, $0 \in f(A_2)$ και οπότε βωένως η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα. 6ε κάθε διαστήα με το x έχουμε ότι είναι x που έχει $x^3 + 2x^2 + 9x - 3 = 0$ και 6ε x που έχει $x^3 + 2x^2 + 9x - 3 = 0$.

ΘΕΜΑ Β

(2)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ όπου}$$

Έχουμε given θετικά $x_0 = 1$ Τότε διψότερο.

(B1)

$\alpha = ?$ Έχουμε διψότερο στο $x_0 = 1$

τοτε: $f'(1) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$$

οπου $x=1: f'(1) = 3 + 2\alpha + 9 = 12 + 2\alpha$
οπως: $f'(1) = 0$ } $\Rightarrow$

$$2\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = -6$$

(B2)

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$$

Μελετούμε την f ως προς την μονotonia της.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{matrix} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{matrix} \text{ σειράς ενός π.ο.}$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'	+	-	-	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως
αυξουσα στο $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$
και γν. φθινουσα στο $[1, 3]$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ.
2025 - ΓΕΛ.

①

2/6/25, ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- Α1 Απόδειξη Σελίδα 186 ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ.
- Α2 ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛΙΔΑ 76. (ΘΕΩΡΗΜΑ)
- Α3 ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛΙΔΑ 161. (ΟΡΙΣΜΟΣ)
- Α4
- | | | |
|---------------|---------------|-------|
| α | $\rightarrow$ | Σωστό |
| β | $\rightarrow$ | Σωστό |
| γ | $\rightarrow$ | Λάθος |
| δ | $\rightarrow$ | Λάθος |
| ε | $\rightarrow$ | Σωστό |